www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ECOLE NATIONALE DES INGENIEURS DES TRAVAUX RURAUX ET DES TECHNIQUES SANITAIRES

STRASBOURG

CONCOURS D'ENTRÉE 1989

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

OPTION PHYSIQUE-MATHÉMATIQUES

DURÉE: 3 HEURES

Dans tout le problème on désigne par (u_n) la suite réelle de terme général u_n $(n \in \mathbb{N})$. On lui associe :

1. La série de terme général u_n notée $\sum u_n$, et pour tout entier n de $\mathbb{N}$ on pose $S_n = u_0 + u_1 + \ldots u_n$ (somme partielle d'indice n de la série).
2. La série entière d'une variable réelle $\sum u_n x^n$ dont on désigne par R le rayon de convergence.

I. Convergence d'une suite au sens de Césaro

1. Calculez les sommes partielles d'indice n des séries dont le terme général est :

   a) $a_n = (-1)^n$

   b) $b_0 = \frac{1}{2}$;

   pour tout $n \geqslant 1$: $b_n = \cos(n\theta)$

   (θ désigne un réel donné).

2. Etudiez dans chacun de ces cas la limite éventuelle de la suite $\left(\frac{S_n}{n+1}\right)$ lorsque n tend vers l'infini.

3. On dit que la suite (u_n) converge vers le réel ℓ au sens de Césaro si la suite $\left(\frac{S_n}{n+1}\right)$ converge vers ℓ.

   a) Montrez que toute suite (u_n) convergente vers ℓ converge au sens de Césaro vers ℓ.

   b) On suppose que la suite (u_n) est monotone croissante. Vérifiez que $nu_n \leqslant S_{2n} - S_n$ quelque soit $n \in \mathbb{N}$.
   En déduire que toute suite monotone (u_n) converge vers ℓ si et seulement si elle converge vers ℓ au sens de Césaro.

4. Soit (z_n) la suite réelle définie de la façon suivante :

   (i) z_0 est un réel donné de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

   (ii) quel que soit $n \in \mathbb{N}$: $z_{n+1} = \sin(z_n)$

   a. Montrez que la suite (z_n) converge.

   b. On suppose $z_0 \neq 0$, vérifiez que $0 < z_n \leqslant \frac{\pi}{2}$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

   On définit la suite (w_n) de terme général :

   $w_n = \frac{1}{z_{n+1}^2} - \frac{1}{z_n^2}$

   Montrez que la suite (w_n) est convergente.

   c. Montrez qu'il existe un couple (α,β) de réels strictement positifs tels que : $z_n \sim \frac{\alpha}{n^\beta}$ au voisinage de l'infini.
   (On précisera les valeurs de α et de β).

II. Convergence d'une série au sens de Césaro

On dit que la série $\sum u_n$ converge vers ℓ au sens de Césaro si la suite (S_n) de ses sommes partielles converge vers ℓ au sens de Césaro, c'est-à-dire :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} \left(S_0 + S_1 + \ldots S_n\right) = \ell.$$

1. Les séries $\sum a_n$, $\sum b_n$, $\sum z_n$ (définies dans la partie I) sont-elles convergentes au sens de Césaro ?
2. Soit $\sum_n = \frac{1}{n+1}\left(S_0 + S_1 \ldots S_n\right)$, exprimez u_n en fonction de n, $\sum_n$, $\sum_{n-1}$, $\sum_{n-2}$ pour tout entier $n \geqslant 2$.
   En déduire qu'une condition nécessaire de convergence au sens de Césaro de la série $\sum u_n$ est : $\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{n} = 0$.

III. Convergence d'une série au sens d'Abel

Soit $\sum u_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geqslant 1$. Pour tout réel x de l'intervalle $]-R, +R[$ on note :

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$$

On dit que la série $\sum u_n$ converge au sens d'Abel si la fonction u(x) admet une limite ℓ lorsque x tend vers 1 à gauche de 1.
$\left[\ell = \lim_{x \to 1^-} u(x)\right]$.

T.S.V.P.

ECOLE NATIONALE des INGENIEURS des TRAVAUX RURAUX et des TECHNIQUES SANITAIRES de STRASBOURG
Opt.-Phy.-Math-Math 2

1. Quel est le rayon de convergence des séries $\sum a_n x^n$, $\sum b_n x^n$, $\sum z_n x^n$, (a_n, b_n, z_n étant ceux définis au I) ?
Si ce rayon est au moins égal à 1, étudiez la convergence au sens d'Abel des séries $\sum a_n$, $\sum b_n$, $\sum z_n$.

2. On suppose que la suite (u_n) converge vers ℓ.

   a. Montrez que le rayon de convergence de la série $\sum u_n x^n$ est au moins égal à 1.

   b. On suppose $\ell = 0$.
   Montrez que pour tout réel ε strictement positif donné, il existe un entier N tel que $|u(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{N} |u_k| x^k + \frac{\varepsilon}{1-x}$ pour tout réel x de $[0, 1[$.
   En déduire $\lim_{x \to 1^-} (1-x)u(x) = 0$.

   c. Etudiez $\lim_{x \to 1^-} (1-x)u(x)$ si ℓ est un réel quelconque.

3. On suppose que la série $\sum u_n$ est convergente et de somme s $\left(s = \sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)$.

   a. Montrez que la série entière $\sum S_n x^n$ ($S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$) est produit de la série $\sum u_n x^n$ et d'une série entière à déterminer.

   b. Montrez que la série $\sum u_n$ converge vers s au sens d'Abel.

4. Soit φ un réel donné de l'intervalle $]0, \pi[$.

   a. Déterminez le rayon de convergence de la série entière $\sum x^n e^{in\varphi}$.

   b. On admet que les séries $\sum \frac{\cos[(n+1)\varphi]}{n+1}$ et $\sum \frac{\sin[(n+1)\varphi]}{n+1}$ sont convergentes, calculez
   $s_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos[(n+1)\varphi]}{n+1}$ et $s_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin[(n+1)\varphi]}{n+1}$.

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail